TEMA 2

FUNCIONES COMPLEJAS: LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

1 Funciones complejas: Límites y continuidad

1.1 Funciones complejas

Definición. Una **función compleja** f definida sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una correspondencia entre Ω y $\mathbb{C}$, denotada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, que a cada $z \in \Omega$ le asocia un único número complejo que se llama imagen por f de z y se denota $f(z)$.

- **Dominio de f:** Ω.
- **Imagen o rango de f:** denotado $\mathcal{I}m(f)$ o bien $f(\Omega)$, es el conjunto

$$\{w \in \mathbb{C} : \exists z \in \Omega \wedge w = f(z)\} = \{f(z) : z \in \Omega\}.$$

Observación:

- Si no se especifica el dominio de una función f se entiende que es el conjunto $\mathcal{D}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \exists w \in \mathbb{C} \wedge w = f(z)\}$.
- Si $S \subset \mathcal{D}(f)$, se denota $f(S)$ al conjunto $\{f(z) : z \in S\}$.

Definición. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función inyectiva (si $\forall z_1, z_2 \in \Omega$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$ se cumple $z_1 = z_2$). Se llama **función inversa de f** a la función $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ definida para $w \in f(\Omega)$ como

$$f^{-1}(w) = z \Longleftrightarrow f(z) = w.$$

Operaciones con funciones complejas

Definición (suma, producto y cociente de funciones). Dados $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, se definen las siguientes funciones sobre Ω:

1. Suma: $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$.
2. Producto: $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$.
3. Cociente: $(f/g)(z) = f(z)/g(z)$ siempre que $g(z) \neq 0 \; \forall z \in \Omega$.

Definición (composición de funciones). Dados $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$, se define la función composición de f y g como $(g \circ f)(z) = f(g(z)) \;\; \forall z \in \Omega_1$.

Ejemplo 1. Determinación de dominios e imágenes.

a) Funciones constantes.

b) Polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y coeficientes complejos:
$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, donde $a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $a_n \neq 0$

c) $\operatorname{Arg} z$, $|z|$, $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$, que son funciones cuyos rangos están contenidos en $\mathbb{R}$.

d) $f(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, que verifica $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$.

e) $f(z) = e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z))$, que denotamos e^z.

f) $f(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, que denotamos $\operatorname{Log} z$.

Observación: Si $w = u + iv$ es la imagen por f de $z = x + iy$ entonces $u = \operatorname{Re} f(x + iy)$ y $v = \operatorname{Im} f(x + iy)$, así se expresa f en función de las coordenadas cartesianas x, y de z:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Luego, $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales de dos variables reales. Se denota $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$.

Ejemplo 2. **a)** $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} + i0$

b) $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$

Observación: Si $z \neq 0$ se puede expresar $f(z)$ en función de las coordenadas polares ρ, θ de z

$$f(z) = f(\rho\, e^{i\theta}) = U(\rho, \theta) + iV(\rho, \theta).$$

Si $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ en coordenadas cartesianas $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U(\rho, \theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \\ V(\rho, \theta) = v(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta). \end{array} \right.$

Ejemplo 3. Expresar las funciones del ejemplo 2 en coordenadas polares.

Funciones multivaluadas

Definición. Una **función multivaluada o multiforme** F definida sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una correspondencia que a cada $z \in \Omega$ le asigna un conjunto de valores de $\mathbb{C}$; es decir, es una aplicación $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 4.

a) $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definida por $\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una función multivaluada.

b) $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definida por $F(z) = z^{1/2} = \{\pm\sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}\}$ es una función multivaluada.

A partir de una función multivaluada se pueden construir funciones propiamente dichas (univaluadas) eligiendo un único valor para cada z. Por ejemplo,

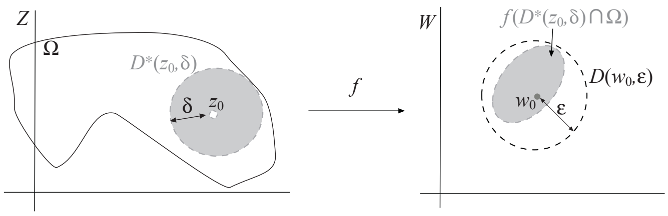
a') Dada $\arg z$, eligiendo para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ el único valor de $\arg z$ perteneciente a $(-\pi, \pi]$ se obtiene la función $f(z) = \operatorname{Arg} z$.

b') $f(z) = \sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}$ y $g(z) = -\sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}$ son funciones obtenidas a partir de la función multivaluada F del apartado b).

1.2 Límites de funciones complejas

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega'$. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, se dice que **$w_0$ es límite de f en z_0** si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ verifica $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Se escribe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

Observación: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $f(D^*(z_0, \delta) \cap \Omega) \subset D(w_0, \varepsilon)$.



Proposición 1. Si existe el límite de una función compleja en un punto, es único.

Observación: Si $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \neq 0 \Longrightarrow \forall M \in (0, |w_0|)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > M\ \forall z \in D^*(z_0, \delta) \cap \mathcal{D}(f)$.

Ejemplo 5. Límites de funciones básicas:

a) Dado $w_0 \in \mathbb{C}$, si $f(z) = w_0\ \forall z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0,\ \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

b) Si $f(z) = z,\ \forall z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0,\ \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Observación: Sea f una función compleja. Se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathcal{D}(f) \\ z_0 \in A' \\ \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} (f|_A)(z) = \lim_{z\to z_0} f(z).$$

El límite de $f|_A$ en z_0 también se denota $\lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\in A}} f(z)$ y se dice límite de f en z_0 relativo a A.

Consecuencia: Si el límite de una función f en z_0 relativo a un conjunto no existe o dos límites relativos de f en z_0 son distintos, entonces $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Ejemplo 6. $\nexists \lim\limits_{z\to 0} \bar{z}/z$ y $\nexists \lim\limits_{z\to 0} |z|/z$.

Propiedades de los límites

Proposición 2. (*Caracterización del límite*) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega'$ y $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$. Dada $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, existe el límite de f en z_0 si y sólo si existen los límites de u y v en (x_0, y_0) y se verifica

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0. \end{cases}$$

Ejemplo 7.

a) $\forall z_0 \in \mathbb{C} \begin{cases} \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} e^z = e^{z_0} \end{cases}$ **b)** Si $x_0 \le 0 \Longrightarrow \begin{cases} \nexists \lim\limits_{z\to x_0} \operatorname{Arg} z \\ \nexists \lim\limits_{z\to x_0} \operatorname{Log} z \end{cases}$

Proposición 3. (*Aritmética de límites*) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega'$. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que existen los límites de f y g en z_0, entonces:

1. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$.
2. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z)\cdot g(z)) = (\lim\limits_{z\to z_0} f(z)) \cdot (\lim\limits_{z\to z_0} g(z))$.
3. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$ siempre que $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.
4. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |\lim\limits_{z\to z_0} f(z)|$. En particular, $\lim\limits_{z\to z_0} |z| = |z_0|$.
5. $\lim\limits_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}$. En particular, $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$. (Aplicar a $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}$)

Corolario (Propos.3)

1. $\left.\begin{array}{r} P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\ a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} P(z) = P(z_0) \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$
2. $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P(z_0)}{Q(z_0)}$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $Q(z_0) \neq 0$.

Proposición 4. (*Límite de la composición de funciones*) Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega_1'$ y $v_0 \in \Omega_2$. Dadas las funciones $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$,se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = v_0 \\ \lim\limits_{z\to v_0} g(z) = g(v_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} (g\circ f)(z) = g(v_0).$$

Ejemplo 8.
a) $\lim\limits_{z\to i} (\bar{z} - i)(z^2 + 2)^2$ **b)** $\lim\limits_{z\to 1+i\sqrt{3}} \dfrac{z^3 + 8}{z - 1 - i\sqrt{3}}$ **c)** $\lim\limits_{z\to -i} \exp\left(\dfrac{\bar{z}z^2\pi + \bar{z}\pi}{iz - 1}\right)$.

Proposición 5. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega'$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$. Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ y existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que $|g(z)| \le M$ para todo $z \in D^*(z_0, r) \cap \Omega$, entonces $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.

Ejemplo 9. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(\bar{z} - 1)\operatorname{Log} z}{z - 1}$.

Límites infinitos y límites en el infinito

Definition. (*Límite infinito en un punto*)
Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega'$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. El **límite de f en z_0 es ∞**, y se nota $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, si $\forall M > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z)| > M$.

Ejemplo 10. $\lim_{z\to 0} 1/z = \infty$.

Observación: Nótese la diferencia de comportamiento de funciones reales y complejas:

- En el caso real, $\nexists \lim_{x\to 0} 1/x$ ni como límite finito ni infinito.
- En el caso real, $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = +\infty$, pero en el caso complejo $\lim_{z\to 0} 1/z = \infty$ y $\nexists \lim_{z\to 0} e^{1/z}$.

Definición.(*Límite finito en el infinito*) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ no acotado y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. El **límite de f en ∞ es $w_0 \in \mathbb{C}$**, y se denota $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$, si $\forall \varepsilon > 0\, \exists k > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z| > k$ entonces $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Ejemplo 11. $\lim_{z\to\infty} 1/z = 0$.

Definición. (*Límite infinito en el infinito*) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ no acotado y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. El **límite de f en ∞ es ∞**, y se denota $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, si $\forall M > 0\ \exists k > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z| > k$ entonces $|f(z)| > M$.

Caracterización de los límites infinitos

Proposición 6. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega'$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0\, \forall z \in \Omega$. Se cumple

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Ejemplo 12. $\lim_{z\to -3i} \dfrac{z^2+9}{(z+3i)^2} = \infty$.

Corolario (Propos. 6) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega'$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ siendo $g(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$. Si $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$, entonces $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty$.

Ejemplo 13.

a) Si $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) \neq 0$ y $Q(z_0) = 0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty$.

b) $\lim_{z\to 1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \infty$ (en el caso real también es un límite infinito).

c) $\lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z-1} = \infty$ (en el caso real no existe el límite).

Proposición 7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ no acotado y tal que $1/z \in \Omega\ \forall z \in \Omega \setminus \{0,\}$. Sean $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $w_0 \in \mathbb{C}$. Se verifica

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \iff \lim_{z\to 0} f(1/z) = w_0.$$

Ejemplo 14. Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0$, con $a_j, b_k \in \mathbb{C}\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, siendo $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} a_n/b_n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Proposición 8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ no acotado y tal que $1/z \in \Omega\ \forall z \in \Omega \setminus \{0,\}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega \setminus \{0\}$, se verifica

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0.$$

Ejemplo 15.

a) $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty \quad \forall P(z)$ polinomio no constante.

b) $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios tales que $\mathrm{gr}(P(z)) > \mathrm{gr}(Q(z)) \Longrightarrow \lim_{z\to\infty} \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \infty$.

1.3 Continuidad de las funciones complejas

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f **es continua en** z_0 si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Se dice que f es continua en Ω si lo es en todo $z \in \Omega$.

Observación: Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se tiene:

- Si $z_0 \in I(\Omega)$ entonces f es continua en z_0.
- $z_0 \in \Omega'$ entonces: f continua en $z_0 \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

  Si $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ pero es distinto de $f(z_0)$, se puede definir una función $\tilde{f}$ continua en z_0, asignándole este límite, y tal que $f(z) = \tilde{f}(z)\ \ \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

Ejemplo 16.

a) Las funciones constantes y la función identidad son continuas en $\mathbb{C}$.

b) Las funciones Re, Im, $f(z) = |z|$ y $g(z) = e^z$ son continuas en $\mathbb{C}$.

c) Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{C}$ y las racionales en su dominio.

Propiedades de las funciones continuas

Proposición 9. (*Caracterización de la continuidad*) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Si $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ se verifica

$$f \text{ es continua en } z_0 \Longleftrightarrow u \text{ y } v \text{ son continuas en } (x_0, y_0)$$

Ejemplo 17. Las funciones Arg y Log son continuas en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Proposición 10. (*Continuidad y aritmética de las funciones complejas*) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$. Se verifica:

$$f \ \text{ y } \ g \ \text{ continuas en } z_0 \Longrightarrow \begin{cases} f + g \text{ es continua en } z_0 \\ f \cdot g \text{ es continua en } z_0 \\ f/g \text{ es continua en } z_0 \text{ si } g(z_0) \neq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 18.

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - i}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}\}$.

b) $f(z) = \dfrac{|z| + 2\bar{z}\,\mathrm{Log}\, z}{z^2 + 1}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus (\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \cup \{i, -i\})$.

Proposición 11. (*Continuidad de la composición de funciones*) Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega_1$. Dadas las funciones $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } z_0 \\ g \text{ es continua en } f(z_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ es continua en } z_0.$$

Ejemplo 19.

a) $f(z) = e^{\bar{z}}$ es continua en $\mathbb{C}$.

b) $f(z) = e^{\frac{z+1}{z}}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) $f(z) = \mathrm{Log}(i - z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{x + i : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$.

Continuidad y funciones multivaluadas

Entre las posibles formas de obtener funciones a partir de una función multivaluada interesan las que asignan valores de forma continua.

Definición. Dada una función multivaluada F, se llama **rama o determinación** de F en un conjunto $\Omega \subset \mathcal{D}(F)$ a toda función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifica:

i) f es continua en Ω

ii) $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Ejemplo 20.

a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ la función multivaluada arg permite definir la rama del argumento $\arg_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ siendo $\arg_\alpha z$ el único valor en $\arg z \cap (\alpha, \alpha + 2\pi)$. La rama principal del argumento, que se sigue denotando Arg está definida en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

b) La función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$ permite definir sobre el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, las ramas de F

$$f_\alpha(z) = \sqrt{|z|}e^{(i \arg_\alpha z)/2} \quad \text{y} \quad g_\alpha(z) = -\sqrt{|z|}e^{(i \arg_\alpha z)/2} = -f_\alpha(z).$$

Llamaremos a f_α, con $\alpha = -\pi/2$, rama principal de $z^{1/2}$.

Continuidad y conjuntos compactos y conexos

Proposición 12. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $f(\Omega)$ es un conjunto compacto.

Corolario (Propos 12.) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $|f|$ está acotado en Ω.

Proposición 13. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $f(\Omega)$ es un conjunto conexo.

2. Derivabilidad de las funciones complejas: Funciones holomorfas

2.1 Definición y primeras propiedades

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f es **derivable** en z_0 si existe el siguiente límite y es un número complejo:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \underset{\text{Notación}}{=} f'(z_0) \leftarrow \text{ derivada de } f \text{ en } z_0$$

Observación: Si $h = z - z_0$ se tiene $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, lo que también equivale a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} = 0$.

Ejemplo 21.

a) Las funciones constantes son derivables en $\mathbb{C}$ con derivada nula en todo punto.

b) La función identidad es derivable en $\mathbb{C}$ con derivada 1 en todo punto.

c) La función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ningún punto.

Propiedades de las derivadas

Proposición 14. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si f es derivable en $z_0 \in \Omega$ entonces f es continua en z_0.

Proposición 15. (Reglas de derivación)

a) Reglas de la suma, el producto y el cociente. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ derivables en $z_0 \in \Omega$. Se verifica

1. $f + g$ es derivable en z_0 siendo $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
2. $f \cdot g$ es derivable en z_0 y $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$.
3. Si $g(z_0) \neq 0$, $1/g$ es derivable en z_0 y $(1/g)'(z_0) = -\dfrac{g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.
4. Si $g(z_0) \neq 0$, f/g es derivable en z_0 y $(f/g)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.

b) Regla de la cadena. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$. Si f derivable en $z_0 \in \Omega_1$ y g derivable en $g(z_0)$, entonces $g \circ f$ es derivable en z_0 y

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

c) Regla de derivación de la función inversa. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto y $z_0 \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es inyectiva, $\exists f'(z_0) \neq 0$, $f(\Omega)$ es abierto y f^{-1} es continua en $f(z_0)$, entonces f^{-1} es derivable en $f(z_0)$ siendo

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Ejemplo 22.

a) Toda función polinómica es derivable en $\mathbb{C}$ y si es de grado $n \in \mathbb{N}$ su derivada es un polinomio de grado $n-1$.

b) Toda función racional es derivable en su dominio.

c) Las funciones Re e Im no son derivables en ningún punto de $\mathbb{C}$.

d) La función $f(z) = |z|^2$ no es derivable en ningún $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sí lo es en $z = 0$.

e) La función $f(z) = |z|$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

2.2 Derivabilidad y ecuaciones de Cauchy-Riemann

Proposición 16. (Caracterización de la derivabilidad: Ecs. de Cauchy-Riemann) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces:

$$f \text{ es derivable en } z_0 \iff \begin{cases} u \text{ y } v \text{ son diferenciables en } (x_0, y_0) \\ \left.\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} \text{ecuaciones de Cauchy-Riemann en } (x_0,y_0) \end{cases}$$

Además, si f derivable en z_0 se verifica $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$.

Ejemplo 23.

a) La función $f(z) = e^z$ es derivable $\forall z \in \mathbb{C}$ siendo $f'(z) = f(z)$.

b) La función $f(x+iy) = x^3 + iy^2 + 5$ es derivable en todo punto $z = x + iy$ que tal que $y = 3x^2/2$ y su derivada es $f'(x+iy) = 3x^2$.

c) La función $f(z) = e^{\bar{z}}$ no es derivable en ningún punto.

Proposición 17. Sean $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ conjunto abierto y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. Si $U(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$ y $V(\rho,\theta) = v(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, entonces:

$$f \text{ es derivable en } z_0 = \rho_0\, e^{i\theta_0} \in \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ y } V \text{ son diferenciables en } (\rho_0, \theta_0) \\ \left.\begin{aligned} \rho_0\, U_\rho(\rho_0,\theta_0) &= V_\theta(\rho_0,\theta_0) \\ U_\theta(\rho_0,\theta_0) &= -\rho_0\, V_\rho(\rho_0,\theta_0) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{ecuaciones de} \\ \text{Cauchy-Riemann en } z_0 \\ \text{en coord. polares}\end{array} \end{cases}$$

Además, si f derivable en z_0 se verifica $f'(z_0) = e^{-i\theta_0}\left(U_\rho(\rho_0,\theta_0) + iV_\rho(\rho_0,\theta_0)\right)$.

Ejemplo 24.

a) La función $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es derivable $\forall z \in \Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ siendo $f'(z) = 1/z$.

b) La rama de la función multivaluada $z^{1/2}$ determinada por $\alpha \in \mathbb{R}$, que viene dada por $f_\alpha(z) = \sqrt{|z|}\, e^{(i \arg_\alpha z)/2}$, es holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{r\, e^{i\alpha} : r \geq 0\}$.

2.3 Derivabilidad de las funciones complejas de variable real

Definición. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f : I \to \mathbb{C}$. Se dice que f es **derivable** en $x_0 \in I$ si $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son derivables en x_0. Se denomina derivada de f en x_0, y se denota $f'(x_0)$, al número complejo $u'(x_0) + iv'(x_0)$.

Ejemplo 25. La función $f(t) = e^{it}$ es derivable $\forall t \in \mathbb{R}$ siendo $f'(t) = ie^{it}$.

Proposición 18. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Si $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en $x_0 \in \Omega \cap \mathbb{R}$ entonces la función compleja de variable real $f = \tilde{f}_{|\Omega\cap\mathbb{R}}$ es derivable en x_0 y se verifica $f'(x_0) = \tilde{f}'(x_0)$.

Observación: El recíproco no es cierto, puede suceder que exista $f'(x_0)$ y en cambio no exista $\tilde{f}'(x_0)$. Por ejemplo, $\tilde{f}(z) = \operatorname{Re} z$ no es derivable en ningún punto $z \in \mathbb{C}$, pero $f = \tilde{f}_{|\mathbb{R}}$ es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ pues

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Re} f(x) = x \\ v(x) &= \operatorname{Im} f(x) = 0 \end{aligned}$$

son funciones derivables $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.4 Funciones holomorfas

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es **holomorfa** en $z_0 \in \Omega$, o que z_0 es un **punto regular** de f, si $\exists \varepsilon > 0$ tal que f es derivable $\forall z \in D(z_0, \varepsilon)$. Si f es holomorfa en cada $z \in \Omega$ se dice que es holomorfa en Ω. Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ se dice que f es **entera**. Se denota

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa } \}.$$

Observación: Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto, se verifica

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff f \text{ es derivable en } z \ \forall z \in \Omega.$$

Ejemplo 26.

a) Toda función polinómica es entera.
b) La función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.
c) La función $f(z) = e^z$ es entera.
d) Dada $f(z) = \operatorname{Log} z$, se verifica $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}\right)$.
e) La rama principal de $z^{1/2}$, $f(z) = \sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}$, cumple $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\})$.
f) La función $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa en ningún dominio.
g) La función $f(x + iy) = x^3 + iy^2 + 5$ no es holomorfa en ningún dominio.

Proposición 19. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, entonces

1. $f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$.
2. $f \cdot g \in \mathcal{H}(\Omega)$.
3. $f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$ si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Proposición 20. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos y sean $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$, entonces $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.

Ejemplo 27.

a) Sea la función $f(z) = z \operatorname{Log} z + \sqrt{z}$, donde $\sqrt{z}$ denota la rama de $z^{1/2}$ definida como $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{(i \arg_0 z)/2}$, siendo $\arg_0$ la rama del argumento con valores en $(0, 2\pi)$. Se verifica que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.

b) La función $h(z) = \sqrt{iz + 1}$, donde la raíz denota la misma rama de $z^{1/2}$ que en el apartado anterior, es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R} \wedge y \leq 1\}$.

c) Dada la función $h(z) = \operatorname{Log}(e^{iz} + 1)$, se verifica que $h \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi + iy : k \in \mathbb{Z} \wedge y \leq 0\}\right)$.

Lema. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable con derivadas parciales nulas en Ω, entonces u es constante en Ω.

Observación. La conexión del dominio es una propiedad esencial. En efecto, la función $u(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ es diferenciable en $\mathcal{D}(u)$ con derivadas parciales nulas y no es constante en $\mathcal{D}(u)$.

Proposición 21. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se verifica:

1. $f'(z) = 0 \ \forall z \in \Omega \Longrightarrow f$ constante en Ω.
2. $\operatorname{Re} f$ es constante en $\Omega \Longrightarrow f$ constante en Ω.
3. $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω (en particular, si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$) $\Longrightarrow f$ constante en Ω.
4. $|f|$ es constante en $\Omega \Longrightarrow f$ constante en Ω.

Funciones holomorfas y funciones armónicas

Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio. Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es **armónica en Ω** si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ (tiene derivadas parciales hasta el orden 2 y son continuas) y $\forall (x,y) \in \Omega$

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad \text{(Ecuación de Laplace)}$$

Proposición 22. Si $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio, y $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, entonces u y v son armónicas en Ω.

Nota: El teorema integral de Cauchy (se verá en el tema 4) permitirá demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es indefinidamente derivable, así sobra la hipótesis $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Problema: Toda función holomorfa proporciona funciones armónicas, nos preguntamos ahora si una función armónica proporciona funciones holomorfas. Sol.: Propos 24.

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ función armónica. Se dice que una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es **armónica conjugada** de u en Ω si $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Observación: Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio, si $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$v \text{ es armónica conjugada de } u \text{ en } \Omega \iff \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

Proposición 23. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio. Se verifica:

1. Si u armónica conjugada de v en Ω y v armónica conjugada de u en $\Omega \Longrightarrow u$ y v son constantes en Ω.
2. v es armónica conjugada de u en $\Omega \iff -u$ es armónica conjugada de v en Ω.

Proposición 24. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio simplemente conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica, entonces existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica conjugada de u en Ω.

Observación: Si el dominio Ω no es simplemente conexo, no se puede asegurar la existencia de la conjugada armónica de u. Por ejemplo, dada

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2),$$

se cumple

- u es armónica en el dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y no tiene armónica conjugada en dicho dominio.
- u tiene armónica conjugada en todo dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- $v(x, y) = \operatorname{Arg}(x + iy)$ es armónica conjugada de u en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$.

Ejemplo 28. Determinar:

a) f holomorfa tal que $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

b) f holomorfa tal que $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy)$.

c) f holomorfa tal que $\operatorname{Im} f(x + iy) = v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$.